Nom: Mohamed ould mohamed mokhtar
N: 1456
7c

Exercices sur Primitives et integrales

Exercice 8

On pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$;

1) Calculer I+J

2) En utilisant une intégration par parties, calculer I-J ,

3) En déduire I et J.

Solution:

1) $I+J=\int_0^{\pi/2}(x\sin^2 x+x\cos^2 x)\,dx$

$I+J=\int_0^{\pi/2}x(\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx$

$I+J=\int_0^{\pi/2}x\,dx$

$I+J=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi/2}$

$I+J=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-0^2\right)$

$I+J=\frac{\pi^2}{8}$

2) on a $I-J=\int_0^{\pi/2}(x\sin^2 x-x\cos^2 x)\,dx$

$I-J=\int_0^{\pi/2}x(\sin^2 x-\cos^2 x)\,dx$

$I-J=\int_0^{\pi/2}(-x\cos 2x)\,dx$

on utilise une intégration par parties:

on pose: $\begin{cases}U(x)=-x\\V'(x)=\cos 2x\end{cases}$

Alors: $\begin{cases}U'(x)=-1\\V(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\end{cases}$

comme $\int UV'=UV-\int U'V$

$I-J=\left[-x\times\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$

$I-J=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\sin 2x)\,dx$

$I-J=\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi/2}$

$I-J=-\frac{1}{4}\cos\pi+\frac{1}{4}\cos 0$

$I-J=\frac{1}{2}$

on resout le système: $\begin{cases}I+J=\frac{\pi^2}{8}\\I-J=\frac{1}{2}\end{cases}$

par addition: $2I=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow I=\frac{\pi^2+8}{16}$

par soustraction: $2J=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow J=\frac{\pi^2-8}{16}$

Nom : Mohamed ould mohamed mokhtar
N: 1456
7c

Exercices sur Primitives et integrales :

Exercice 10

En utilisant le changement de variable, calculer les intégrales suivantes:

$I_1=\int_1^2 \frac{dx}{(4x+5)^5}$; $t=4x+5$ $\qquad$ $I_2=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; $x=\tan t$

$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4dx}{1+\cos x}$; $t=\tan\frac{x}{2}$ $\qquad$ $I_4=\int_2^{3} \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$; $t=x-1$

$I_5=\int_0^{2} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2}dx$; $t=\sqrt{1+x}$ puis $t=\tan u$.

Solution :

① $I_1=\int_1^2 \frac{dx}{(4x+5)^5}$

$t=4x+5$

$\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=9 \\ x=2 \Rightarrow t=13 \end{cases}$

$dt=4dx \Rightarrow dx=\frac{1}{4}dt$

$I_1=\int_9^{13}\frac{1}{4}\frac{dt}{t^5}$

$=\frac{1}{4}\int_9^{13}t^{-5}dt$

$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{-4}t^{-4}\right]_9^{13}$

$\boxed{I_1=\frac{-1}{16}(13^{-4}-9^{-4})}$

② $I_2=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$

$x=\tan t$, $t\in[0;\pi/2[$

$\begin{cases} x=1 \Rightarrow \tan t=1 \Rightarrow t=\pi/4 \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow \tan t=\sqrt{3} \Rightarrow t=\pi/3 \end{cases}$

$dx=(1+\tan^2 t)dt$

$I_2=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{(1+\tan^2 t)}{1+\tan^2 t}dt$

$I_2=\int_{\pi/4}^{\pi/3}dt \Rightarrow I_2=[t]_{\pi/4}^{\pi/3} \Rightarrow I_2=\pi/3-\pi/4$

$\boxed{I_2=\frac{\pi}{12}}$

③ $I_3=\int_0^{\pi/2}\frac{4dx}{1+\cos x}$

$t=\tan\frac{x}{2}$

$\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=\tan 0=0 \\ x=\pi/2 \Rightarrow t=\pi/4=1 \end{cases}$

$dt=\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})dx$

$dt=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$dx=2\cos^2\frac{x}{2}dt$

$I_3=\int_0^1\frac{4\times 2\cos^2\frac{x}{2}}{1+\cos x}dt$

on sait que : $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$

Alors $I_3=\int_0^1 4dt=[4t]_0^1=4$

$\boxed{I_3=4}$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

(4) $I_4 = \int_2^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$

$t = x - 1$

$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow t = 1 \\ x = 3 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$$

$dt = dx$

$$\Rightarrow I_4 = \int_1^2 \frac{(t+1)^3}{\sqrt{t}} dt$$

$$I_4 = \int_1^2 \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^{1/2}} dt$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{t^3}{t^{1/2}} + \frac{3t^2}{t^{1/2}} + \frac{3t}{t^{1/2}} + \frac{1}{t^{1/2}} \right) dt$$

$$= \int_1^2 \left(t^{5/2} + 3t^{3/2} + 3t^{1/2} + t^{-1/2} \right) dt$$

$$= \left[\frac{t^{5/2+1}}{\frac{5}{2}+1} + \frac{3t^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{3t^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{t^{-1/2+1}}{\frac{-1}{2}+1} \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{16}{7} + \frac{24}{5} + 6 \right)\sqrt{2} - \left(\frac{2}{7} + \frac{6}{5} + 4 \right)$$

$$\boxed{I_4 = \left(\frac{458}{35} \right)\sqrt{2} - \frac{192}{35}}$$

(5)
$$I_5 = \int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 + 3x + 2} dx$$

$t = \sqrt{x+1}$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 2 \Rightarrow t = \sqrt{3} \end{cases}$$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx \Rightarrow dt = \frac{1}{2t} dx$

$\Rightarrow dx = 2t\, dt$

on constate que $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) = t^2(t^2+1)$

$$I_5 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t \times 2t}{t^2(t^2+1)} dt \Rightarrow I_5 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{t^2+1}$$

$t = \tan U$

$$\begin{cases} t = 1 \Rightarrow \tan U = 1 \Rightarrow U = \pi/4 \\ t = \sqrt{3} \Rightarrow \tan U = \sqrt{3} \Rightarrow U = \pi/3 \end{cases}$$

$dt = (1 + \tan^2 U)\, dU$

$$I_5 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{2\cancel{(1+\tan^2 U)}}{\cancel{1+\tan^2 U}} dU$$

$$I_5 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} 2 dU = [2U]_{\pi/4}^{\pi/3}$$

$$I_5 = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \boxed{I_5 = \pi/6}$$

Nom : Mohamed ould mohamed mokhtar
N°: 1456
7c

Exercices sur Primitives et Integrales

Exercice ①:

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par: $f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\,dt$.

1) Montrer que f est une fonction affine.

2) Donner l'expression de f(x).

Solution:

si : $F(x) = \int_{U(x)}^{V(x)} f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = V'(x) \times f(V(x)) - U'(x) \times f(U(x))$

1) pour montrer que f est une fonction affine il faut que : $f'(x) = cte$

$$F(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\,dt \Rightarrow f'(x) = \cos x \sqrt{1-\sin^2 x} - (-\sin x)\sqrt{1-\cos^2 x}$$

$$= \cos x \sqrt{\cos^2 x} + \sin x \sqrt{\sin^2 x}$$

$$= \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$f'(x) = 1 = cte$$

$\Rightarrow f(x) = x + k$ d'ou f est une fonction affine

2) $f(x) = x + k$

si $x = \pi/4$ $\quad \left(\cos \pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\Rightarrow f(\pi/4) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \pi/4 + k = 0$$

$$\Rightarrow k = -\pi/4$$

$\boxed{\text{donc } f(x) = x - \pi/4}$

Nom : Mohamed ould mohamed mokhtar
N: 1456
7 C

Exercices sur Primitives et Integrales :

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1+\tan^{2012}x}, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2} \\ f(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue, positive, décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Montrer que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a: $f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=1$.

3) Interpréter le résultat précédent graphiquement. En déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{\pi}{4}$.

Solution

$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1+\tan^{2012}x} & x\in[0;\pi/2] \\ f(\pi/2)=0 \end{cases}$

1)

$\dfrac{1}{1+\tan^{2012}x}=\dfrac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{2012}}$

$\cos x=0 \Rightarrow x=\pi/2+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

- si $k=0 \Rightarrow x=\pi/2$
- si $k=1 \Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}>\pi/2$
- si $k=2 \Rightarrow x=-\pi/2<\pi/2$

$\sin x=0 \Rightarrow x=k\pi$

- $k=0 \Rightarrow x=0 \in[0;\pi/2]$
- $k=1 \Rightarrow x=\pi>\pi/2$
- $k=2 \Rightarrow x=-\pi<\pi/2$

x	0		$\pi/2$
$\cos x$		$+$	0
	0	$+$	
	0	$+$	$\Vert$

$\tan x\geq 0 \Rightarrow 1+\tan x\geq 0$

D'où $\dfrac{1}{1+\tan^{2012}x}\geq 0$

Donc f est strictement positive sur $[0;\pi/2[$

D'autre part $f(\pi/2)=0 \Rightarrow f$ est positive $[0;\pi/2]$

et comme $\tan x$ est continue sur son ensemble de definition d'où $\dfrac{1}{1+\tan^{2012}x}$ est continue sur $[0;\pi/2]$

$\Rightarrow f$ est continue sur $[0;\pi/2[$

$f(\pi/2) = 0$

$\lim_{x \to \pi/2^-} f(x) = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{2012}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Donc $\lim_{x \to \pi/2^-} f(x) = f(\pi/2) = 0$ f est continue

a gauche en $\pi/2$

on a aussi $\forall x \in [0;\pi/2]$

$f'(x) = \frac{-2012(1+\tan^2 x)\tan x^{2012}}{(1+\tan^{2012} x)^2} \leq 0$

d'où f est decroissante sur $[0;\pi/2]$

2)

Si $x \in [0;\pi/2[$ on a: $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{1+\tan^{2012}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{\tan^{2012} x}} = \frac{\tan^{2012} x}{\tan^{2012} x + 1}$

donc:

$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + f(x) = \frac{\tan^{2012}}{1+\tan^{2012}} + \frac{1}{1+\tan^{2012}} = 1$

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + f(x) = 1$

3)

$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + f(x) = 1$

est de la forme $f(2a-x) + f(x) = 2b$

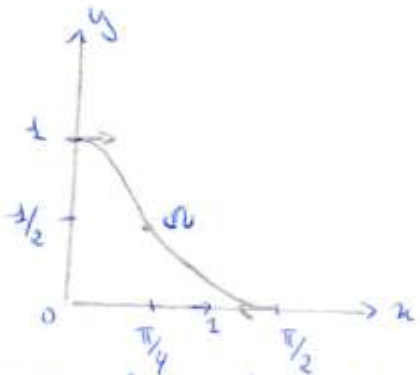
avec $(a;b) = \left(\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$

Alors le pt $\Omega\left(\frac{\pi}{4};1/2\right)$ est un centre de symetrie de $\mathcal{C}_f$

on deduit le T.V et sa courbe

x	0		$\pi/2$
f'	0	$-$	0
f	1	$\searrow$	0

$\mathcal{C}_f$



comme f est continue et positive sur $[0;\pi/2]$ l'aire du domaine plan limité par $\mathcal{C}$ et les droites $x=0$; $x=\pi/2$ est calculé par $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$

d'autre part et par symetrie cette aire est egale à l'aire du triangle de base $\pi/2$ et de hauteur 1 donc

$S = \frac{b \times h}{2} = \frac{\pi/2 \times 1}{2} = \frac{\pi}{4}$

d'où $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \pi/4$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Nom : Mohamed ould mohamed mokhtar
N: 1456
7 c

Exercice sur primitives et Integrales :

Exercice 4

Soit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par: $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

On pose $: I = \int_0^1 \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$; $J = \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}dx$.

Calculer f'(x); en déduire I et J.

Solution :

1) on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ soit $f'(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

* L'integrale $I = \int_0^1 \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$ peut s'ecrit sous la forme :

$I = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} (x+\sqrt{x^2+1}) dx$

D'où $I = \left[\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+1})^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}(2)^2$

En fin $I = -\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$

* L'integrale $J = \int_0^1 \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} dx$ peut être sous la forme :

$J = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2} dx$ d'où $J = \left[\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]_0^1$

$J = \frac{-1}{1+\sqrt{2}} + 1$

En fin : $J = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

;